УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 512.624

Г.И. БЕЛЯВСКИЙ, А.В. ЧЕРНОВ

КОНТРОЛИРУЕМОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

На основе линейного контрольного уравнения предложено свойство контролируемости детерминированных динамических систем над конечными полями. Установлена связь между контролируемостью и фундаментальным свойством управляемости системы. Построен пример синтеза контролируемой детерминированной динамической системы над конечным полем.

Ключевые слова: *динамическая система, конечное поле, характеристический полином, поле разложения.*

Введение. Целью статьи является исследование структуры динамических систем, обладающих свойствами, которые позволяют на основе простого контрольного уравнения обнаружить отказ системы в момент его возникновения. На основе исследования можно дать конкретные предложения по синтезу контролируемых систем.

В исследовании использована технология конечных полей. Поскольку основным инструментом исследования является характеристический многочлен над полем комплексных чисел, и, как и всякий многочлен, он вполне разложим, то требуется, чтобы характеристический многочлен приобрел аналогичное свойство над конечным полем. Поэтому, прежде всего, уделено внимание вопросу расширения исходного поля до поля, в котором характеристический многочлен становится вполне разложимым. Естественно, что расширение должно быть в некотором смысле минимальным.

Постановка и решение задачи синтеза контролируемой системы. Пусть F_q – конечное поле порядка q. Линейной стационарной динамической системой (A,B,C), функционирующей в дискретные моменты времени, будем называть систему, наблюдаемая последовательность которой – $w = Col(y,u)$ – удовлетворяет уравнениям [1,2]:

$$\begin{aligned} sx &= Ax + Bu; \\ y &= Cx, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x \in R^n(q)$; $u \in R^r(q)$; $y \in R^p(q)$ - векторные пространства над полем F_q; $A \in R^{n\times n}(q)$; $B \in R^{n\times r}(q)$; $C \in R^{p\times n}(q)$ - пространства матриц соответствующих размерностей над полем F_q; s – оператор правого сдвига на пространстве последовательностей. Возникновение сбоя в некоторый момент времени t приводит к нарушению уравнений (1), т.е. мы наблюдаем в этот момент времени

$$w_t + \varepsilon_t = Col(y_t + \nu_t, u_t + \mu_t)$$

и

$$x_{t+1} = Ax_t + B(u_t + \mu_t),\quad y_t + \nu_t \neq Cx_t. \tag{2}$$

На основе (1) может быть построено контрольное уравнение

$$(l, y_t - Cx_t) = 0, l \neq 0, \tag{3}$$

предназначенное для обнаружения искажений. Для вычисления контрольного уравнения необходимо вычисление скалярных произведений $(l, y_t), (C^{\mathsf{T}}l, x_t)$. Напомним, что последовательность x – ненаблюдаемая последовательность, поэтому для реализации (3) необходимо исключить x_t из контрольного уравнения:

$$x_t = A^t x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^i B u_{t-1-i}. \tag{4}$$

Далее будем считать, что $x_0 = 0$. Из (4) следует, что

$$(C^{\mathsf{T}}l, x_t) = \sum_{i=0}^{t-1}(C^{\mathsf{T}}l, A^i B u_{t-1-i}) = \sum_{i=0}^{t-1}\left(B^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}})^i C^{\mathsf{T}}l, u_{t-1-i}\right). \tag{5}$$

Отметим следующий факт. Если $B^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}})^i C^{\mathsf{T}}l = 0$ для $i = 0,1,\ldots,n-1$, то $(C^{\mathsf{T}}l, x_t) = 0$ для любого t, что существенно упрощает контрольное уравнение:

$$(l, y_t) = 0. \tag{6}$$

Другими словами, если

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} Ker\left(B^{\mathsf{T}}(A^{\mathsf{T}})^i C^{\mathsf{T}}\right) \neq 0, \tag{7}$$

то существует такой вектор l, для которого контрольное уравнение приобретает вид (6).

Определение. Систему $\left(A,B,C\right)$ будем называть контролируемой, если для нее существует контрольное уравнение (6) или $\bigcap_{i=0}^{n-1} Ker\left(B^{\mathsf{T}}\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{i} C^{\mathsf{T}}\right) \quad 0$.

Из (7) следует, что

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} Ker\left(B^{\mathsf{T}}\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{i}\right) \bigcap \mathrm{Im}\left(C^{\mathsf{T}}\right) \quad 0. \tag{8}$$

Непосредственно из (8) получаем, что $\bigcap_{i=0}^{n-1} Ker\left(B^{\mathsf{T}}\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{i}\right) \quad 0$.

Рассмотрим

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} Ker\left(B^{\mathsf{T}}\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{i}\right)^{\perp} = \ _{i=0}^{n-1}\left(Ker\left(B^{\mathsf{T}}\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{i}\right)\right)^{\perp} = \ _{i=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(A^{i}B\right).$$

Подпространство $R_0 = \ _{i=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(A^{i}B\right)$ совпадает с управляемым подпространством $\left(A,B\right)$. Следовательно, учитывая работу [1], сформулируем

Утверждение 1. Необходимым условием для контролируемости динамической системы является условие $R_0 \quad R^{n}$, или пара $\left(A,B\right)$ является неуправляемой парой.

Допустим, что пара $\left(A,B\right)$ является неуправляемой парой, но $\bigcap_{i=0}^{n-1} Ker\left(B^{\mathsf{T}}\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{i}\right) \bigcap \mathrm{Im}\left(C^{\mathsf{T}}\right) = 0$. Рассмотрим произвольный вектор l и вектор $g \quad \bigcap_{i=0}^{n-1} Ker\left(B^{\mathsf{T}}\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{i}\right)$. Обозначим через $v = C^{\mathsf{T}} l - g$. Рассмотрим матрицу $\tilde{C} = \begin{matrix} C \\ v^{\mathsf{T}} \end{matrix}$ и вектор $\hat{l} = \begin{matrix} l \\ -1 \end{matrix}$, тогда $\hat{C}^{\mathsf{T}} \hat{l} = g$.

Следовательно, $\bigcap_{i=0}^{n-1} Ker\left(B^{\mathsf{T}}\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{i}\right) \bigcap \mathrm{Im}\left(\hat{C}^{\mathsf{T}}\right) \quad 0$, и для системы $\left(A,B,\hat{C}\right)$ существует такой вектор l, для которого контрольное уравнение приобретает вид (6). Система отличается от системы $\left(A,B,C\right)$

дополнительным выходом. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. По любой неуправляемой системе (A,B,C) можно построить контролируемую систему $(A,B,\widehat{C})$, причем матрица $\widehat{C}$ либо совпадает с матрицей C, либо содержит одну дополнительную строку.

Рассмотрим управляемую динамическую систему (A,B,C) и H – минимальное собственное подпространство A^{T} размерности m и $\{g_i\}$ – ортонормированный базис в H.

Отметим, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Неравенство $m < n$ выполняется тогда и только тогда, когда характеристический многочлен матрицы A^{T} разложим над полем F_q.

Рассмотрим проекцию x_{t+1} на подпространство H:

$$\sum_i (g_i, x_{t+1}) g_i = \sum_i (Ax_t + Bu_t, g_i) g_i =$$

$$= \sum_i (A^{\mathsf{T}} g_i, x_t) g_i + \sum_i (u_t, B^{\mathsf{T}} g_i) g_i .$$

Поскольку вектор $A^{\mathsf{T}} g_i \in H$, то $A^{\mathsf{T}} g_i = \sum \alpha_{i,k} g_k$.

Следовательно,

$$\sum_i (g_i, x_{t+1}) g_i = \sum_{i,k} \alpha_{i,k} (g_k, x_t) g_i + \sum_i (u_t, B^{\mathsf{T}} g_i) g_i .$$

Поскольку векторы g_i – линейно независимые, то $\forall\, i$ выполняется равенство

$$(g_i, x_{t+1}) = \sum_k \alpha_{i,k} (g_k, x_t) + (u_t, B^t g_i) .$$

Пусть $z_t = \{(g_i, x_t)\}$. Тогда $z_{t+1} = \tilde{A} z_t + \tilde{B} u_t$, где $\tilde{A} = (\alpha_{i,k})$, $\tilde{B} = ((g_i, b_j))$, а b_j – j-й столбец матрицы B. Рассмотрим динамическую систему $(\widehat{A}, \widehat{B}, \tilde{C})$ с пространством состояний R^{n+m}, с матрицей $\widehat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}$, матрицей $\widehat{B} = \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$ и матрицей $\tilde{C} = (C \quad 0)$. Наблюдаемая последовательность динамической системы (A,B,C) совпадает с на-

блюдаемой последовательностью динамической системы $\left(\widehat{A},\widehat{B},\tilde{C}\right)$. Является справедливым следующее утверждение.

Утверждение 3. Пара $\left(\widehat{A},\widehat{B}\right)$ не является управляемой.

Действительно, пространство R^n является собственным подпространством пространства R^{n+m}. С другой стороны, управляемое пространство пары $\left(\widehat{A},\widehat{B}\right)$ – $\widehat{R}_0$ = R^n, так как $H \quad R^n$.

Из утверждений (1) и (3) следует утверждение 4.

Утверждение 4. По любой управляемой динамической системе $\left(A,B,C\right)$ можно построить контролируемую динамическую систему $\left(\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\right)$, причем матрица $\widehat{C}$ либо совпадает с матрицей $\tilde{C}$, либо содержит одну дополнительную строку.

Рассмотрим случай, когда минимальное собственное подпространство матрицы A^{T} совпадает с пространством R^n, т.е. характеристический полином матрицы A^{T} неприводим над полем F_q. В этом случае $\tilde{A}$ = A, что эквивалентно дублированию динамической системы.

Дальнейшее изложение опирается на известные из теории конечных полей факты [3], которые можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если $f \quad F_q\left[x\right]$ – неприводимый многочлен степени n над F_q, то его полем разложения над F_q является поле F_{q^n}. При этом все корни многочлена f простые и ими являются $\alpha,\alpha^q,\ldots,\alpha^{q^{n-1}}$, где α – некоторый корень многочлена f. Причем поле F_{q^n} изоморфно фактор-полю $F_q\left[x\right]/f\left(x\right)$ и является векторным пространством размерности n над полем F_q. Элементы $\left\{1,\alpha,\ldots,\alpha^{m-1}\right\}$ образуют базис этого пространства.

Теорема 1 позволяет предложить конструктивный алгоритм построения поля разложения F_{q^n}.

Рассмотрим динамическую систему $\left(A,B,C\right)$ над полем F_q, которую обозначим DS_q, и характеристический многочлен f матрицы A^{T} неприводим над полем F_q. Построим поле разложения многочлена f –

F_{q^n} и рассмотрим динамическую систему (A, B, C) над полем F_{q^n}, которую обозначим DS_{q^n}. Поскольку F_q является подполем поля F_{q^n}, то наблюдаемая последовательность DS_q совпадает с наблюдаемой последовательностью DS_{q^n}, если компоненты входной последовательности u являются элементами поля F_q.

Является справедливым

Утверждение 5 Если система DS_q управляемая, то система DS_{q^n} также управляемая. Действительно, управляемое пространство системы $R_0(q^n)$ является линейной оболочкой управляемого пространства системы DS_q – $L(R_0(q))$ в векторном пространстве $R^n(q^n)$. Поскольку $R_0(q) = R^n(q)$, то $L(R_0(q)) = R^n(q^n)$.

В результате формулируется

Утверждение 6.По любой управляемой динамической системе DS_q над полем F_q, у которой характеристический многочлен матрицы A^{T} – $f_{A^T}(x)$ неприводим над полем F_q, можно построить контролируемую динамическую систему DS_{q^n} над полем F_{q^n}, причем матрица $\widehat{C}$ либо совпадает с матрицей $\tilde{C}$, либо содержит одну дополнительную строку; размер матрицы $\widehat{A}$ – $(n+1) \quad (n+1)$, размер матрицы $\widehat{B}$ – $(n+1) \quad r$.

Пример синтеза контролируемой системы

Построим пример синтеза дискретной динамической системы над конечным полем, иллюстрирующий применение предложенного нами свойства контролируемости.

Рассмотрим кольцо многочленов над полем F_q – $F_q[x]$.

Приведем теорему, которая позволяет предварительно определить структуру поля разложения.

Теорема 2. Если $f \quad F_q[x]$ – неприводимый многочлен над полем $F_q[x]$, то фактор-кольцо $F_q[x] / (f)$ является полем.

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Поле F_{q^n} изоморфно фактор-полю $F_q/(f)$ и может рассматриваться как векторное пространство размерности n над полем F_q.

Рассмотрим пример построения расширения.

Пример. Рассмотрим поле F_3 и характеристический многочлен матрицы $A^T = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$ – $f(x) = x^2 + x + 2$, который неразложим над этим полем.

Пусть α некоторый корень этого многочлена. Из теоремы 3 следует, что расширение поля F_3 до поля разложения F_9 является подпространством размерности 2, а $[1, \alpha]$ образуют базис этого пространства. Построим таблицы операций сложения и умножения в поле F_9.

Таблица сложения

+	0	1	2	α	$\alpha+1$	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
0	0	1	2	α	$\alpha+1$	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
1		2	0	$\alpha+1$	$\alpha+2$	α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$	2α
2			1	$\alpha+2$	α	$\alpha+1$	$2\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$
α				2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$	0	1	2
$\alpha+1$					$2\alpha+2$	2α	1	2	0
$\alpha+2$						$2\alpha+1$	2	0	1
2α							α	$\alpha+1$	$\alpha+2$
$2\alpha+1$								$\alpha+2$	α
$2\alpha+2$									$\alpha+1$

Таблица умножения

*	0	1	2	α	$\alpha+1$	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	2	α	$\alpha+1$	$\alpha+2$	2α	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
2			1	2α	$2\alpha+2$	$2\alpha+1$	α	$\alpha+2$	$\alpha+1$
α				$2\alpha+1$	1	$\alpha+1$	$\alpha+2$	$2\alpha+2$	2
$\alpha+1$					$\alpha+2$	α	2	α	$2\alpha+1$
$\alpha+2$						2	$2\alpha+2$	1	α
2α							$2\alpha+1$	$\alpha+1$	1

2α+1								2	2α
2α+2									α+2

В примере построенное поле является полем разложения для многочлена $f(x) = x^2 + x + 2$. Действительно, легко проверяется, что $f = (x - \alpha)(x - 2\alpha - 2)$, т.е. $2\alpha + 2$ – второй корень многочлена.

Рассмотрим динамическую систему над полем F_3.

$$x_{t+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u_t,$$
$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} x_t. \qquad (9)$$

Вычислим пространство управляемости системы

$$R_0 = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$\lambda, \delta = \{0,1,2\}$. Нетрудно проверить что $R_0 = R^2(3)$. Следовательно, динамическая система (9) не является контролируемой. Поскольку, как было показано ранее, характеристический многочлен неприводим, следует рассмотреть динамическую систему над полем F_9. Матрица

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, матрица $\hat{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha + 2 \end{pmatrix}$, матрица $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$

вычислялись с применением таблиц сложения и умножения в поле F_9. В силу утверждения 6 рассмотренная в (9) динамическая система является контролируемой.

Выводы. В статье предложено определение контролируемости системы на основе линейного контрольного уравнения (6). Установлена связь между контролируемостью и управляемостью в виде утверждения 1. На основе этого предложен метод внесения минимальной избыточности с целью сделать управляемую систему контролируемой (утверждение 6).

Библиографический список

1. Уонем М. Линейные многомерные системы управления /М.Уонем. – М.: Наука, 1980. – 375 с.
2. Oded G. Discrete Dynamical Systems / G. Oded. – Springer-Verlag, 2007. – 152 p.

3. Лидл Р. Конечные поля / Р.Лидл, Г.Нидеррайтер. Т1 и Т2. – М.: Мир, 1988. – 818 с.

Материал поступил в редакцию 24.11.08.

G.I.BELIAVSKIY, A.V. CHERNOV

INSPECTABILITY AND CONTROLLABILITY IN DETERMINED DYNAMIC SYSTEMS OVER FINITE FIELDS

On the basis of linear control equation the inspectability property of determined dynamic systems over finite fields has been offered. Connection between inspectability and fundamental property of controllability of system is established. The synthesis example of the inspectable determined dynamic system over finite field has been constructed.

БЕЛЯВСКИЙ Григорий Исаакович (р. 1950), заведующий кафедрой «Прикладная математика и вычислительная техника» Ростовского государственного строительного университета, доктор технических наук (1994), профессор (1995). Окончил Ростовский государственный университет (1972) по специальности «Прикладная математика».
Основные направления научной деятельности: искусственный интеллект, случайные процессы, распознавание образов.
Автор более 100 научных работ.

ЧЕРНОВ Андрей Владимирович (р. 1971), доцент кафедры «Прикладная математика и вычислительная техника» Ростовского государственного строительного университета, кандидат технических наук (1998). Окончил Ростовский институт инженеров железнодорожного транспорта (1993) по специальности «Автоматика, телемеханика и связь».
Область научных интересов: теория булевых функций, техническая диагностика и синтез дискретных систем.
Автор 54 научных работ, 2 учебников.